Leçon 201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (X, d) est un espace métrique.

1. Espaces de fonctions régulières. —

1. Généralités. —

- Pro : Pour X, Y métriques, $f : X \to Y$ uniformément continue implique f continue.
- Contre-ex : $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0,1]$ est continue, non uniformément continue.
- Ex : Les fonctions Lipschitziennes sont uniformément continues.
- Théorème de Heine : Si X est un espace métrique compact, alors $f : X \to Y$ continue implique que f est uniformément continue sur X.
- Pro : Si X est compact et $f : X \to Y$ continue, alors $f(X)$ est un compact de Y
- App : Si X est compact, alors pour $f : X \to \mathbb{R}$ continue, f est bornée et atteint ses bornes.
- Def : Sur $C^0(X, \mathbb{K})$, on définie $\|f\|_\infty := \sup_X(|f(x)|)$.
- Pro : $(C^0(X, \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ est un evn. Si X est compact, alors c'est un espace de Banach.
- App : Si (X, d) est compact, toute série de fonctions $f_n \in C^0(X, \mathbb{K})$ qui converge normalement converge uniformément.
- Ex : $x \in [0,1] \mapsto \sum_n \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est continue.

2. Parties compactes. —

- Def : Partie équicontinue.
- Ex : L'ensemble des fonctions k-Lipschitziennes est une partie équicontinue.
- Théorème d'Ascoli : Soit (X, d) compact. Une partie A de $C^0(X, \mathbb{K})$ est d'adhérence compacte ssi A est bornée et équicontinue.
- App : Théorème de Cauchy-Arzela-Peano : Soit $K = [t_-a, t_+a] \times \overline{B(x_0, r)} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ cylindre compact, $f : K \to \mathbb{R}^n$ continue, $M = \|f\|_{\infty,K}$, et $c = min(a, \frac{r}{M})$.
  Alors il existe une fonction $y : [t_0 - c, t_0 + c] \to \overline{B(x_0, r)}$ de classe C^1 vérifiant $y(t_0) = x_0$ et $y'(t) = f(t, y(t))$.
- App : Soient (X, d),(Y, d') métriques compacts. Soit μ une mesure borélienne finie sur Y, et soit $K \in C^0(X \times Y, \mathbb{K})$.
  Alors l'opérateur linéaire $T : f \in C^0(Y, \mathbb{K}) \mapsto \int_Y K(., y)f(y)d\mu(y) \in C^0(X, \mathbb{K})$ est compact.
- Premier théorème de Dini : Soit (X, d) compact et $f_n : X \to \mathbb{R}$ suite croissante de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction continue. Alors la convergence est uniforme sur X.

3. Parties denses. —

- Théorème de Stone-Weierstrass : Soit (X, d) compact. Soit A une sous-algèbre de $C^0(X, \mathbb{K})$ contenant les constantes (et stable par conjugaison si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) qui soit séparante (pour $x \neq y$, $\exists f \in A$ tq $f(x) \neq f(y)$).
  Alors A est dense dans $C^0(X, \mathbb{K})$ pour $\|.\|_\infty$.
- App : L'ensemble des fonctions Lipschitziennes est dense dans $C^0(X, \mathbb{K})$.
- App : Théorème de Weierstrass : Si $X = [a, b]$, l'ensemble des fonctions polynômiales réelles sur $[a, b]$ est dense dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$.
- Lem : Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ tq $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0\ \forall n \geq 0$. Alors $f \equiv 0$.
- Théorème de Baire : Dans un espace complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.
- **Dev** : Densité des fonctions continues sur $[0,1]$ et dérivables nulle part.
- App : Un evn possédant une famille libre dénombrable telle que tout élément soit une combi lin des éléments de la famille n'est pas complet.

2. Espaces L^p. —

Ici, $(Y, \mathbb{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

1. Construction et structure des L^p. —

- Def : Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathbb{L}^p(Y) := \{f : X \to \mathbb{K}$ mesurable tq $\int_Y |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty\}$. On note alors $\|f\|_p := (\int_Y |f(x)|^p d\mu(x))^{\frac{1}{p}}$.
  Et $\mathbb{L}^\infty(Y) := \{f : Y \to \mathbb{K}$ mesurable tq $\exists M > 0$ **tq** $f \leq_{\mu-pp} M\}$. On note alors $\|f\|_\infty := \inf(\{M > 0$ **tq** $f \leq_{\mu-pp} M\})$.
- Def : On définit $N(Y) := \{f : Y \to \mathbb{K}$ tq $f =_{pp} 0\}$, et $L^p(Y) := \mathbb{L}^p(Y)/N(Y)$.
- Ex : Pour $Y = \mathbb{N}$, $\mathbb{A} = \mathbb{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage, $l^p(\mathbb{N}) := \mathbb{L}^p(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites $(x_n)_n$ telles que $\sum_n |x_n|^p \leq +\infty$ et $l^\infty(\mathbb{N}) := \mathbb{L}^\infty(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites bornées.
- Inégalité de Minkowski : $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.
- Pro : Pour $f \in L^p(Y)$, $\|f\|_p$ est bien définie, et est une norme.
- Théorème de Riesz-Fischer : $\forall 1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(Y)$ est un espace de Banach.
- Pro : Dans un espace probabilisé (de mesure finie), on a : $f \in L^p \Rightarrow f \in L^q$ $\forall 1 \leq q \leq p$.
  Et $\lim_{p\to\infty}(\|f\|_p) = \|f\|_\infty \in [0, +\infty]$.
- Contre-Ex : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ mais est dans $L^2(\mathbb{R})$.
- Pro : Si $f \in L^p$ et $f \in L^q$ pour $1 \leq q \leq p$, alors $f \in L^r$ $\forall q \leq r \leq p$.
- Pro : Si $f \in l^p$ alors $f \in l^q$ $\forall p \leq q$. On a la propriété "inverse" du cas d'un espace de mesure finie.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : Pour $f, g \in L^2(Y)$, $\|fg\|_2 \leq \|f\|_2.\|g\|_2$. Ainsi, $\mathbb{L}^2(X)$ est stable pour le produit.
- Inégalité de Hölder : Pour $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $f \in L^p(Y)$, $g \in L^q(Y)$, on a : $\|fg\|_r \leq \|f\|_p.\|g\|_q$. Donc $fg \in L^r(Y)$ (Vrai aussi pour $p = \infty$ et $q = 1$).
- Thm : $L^2(Y)$ est un espace de Hilbert pour $< f, g >= \int_Y f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$.
- Théorème de Riesz : Pour $1 < p < \infty$, il y a un isomorphisme isométrique entre le dual de L^p, $(L^p)'$ et L^q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
  Le dual de L^1 est isométrique à L^∞ mais le dual de L^∞ n'est pas isométrique à L^1

(il le contient seulement).
Ainsi, les espaces L^p pour $1 < p < \infty$ sont réflexifs : $((L^p)')' \simeq L^p$.

2. Parties denses. —
Ici, $(Y, \mathbb{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

- Thm : Pour $1 \leq p < +\infty$, l'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.
  Pour $1 \leq p < +\infty$, l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.
- App : $L^p(\mathbb{R})$ est séparable.
- App : L'opérateur de translation $\tau_x : f(.) \mapsto (f(x+.))$ est continu dans tous les L^p.
- Contre-ex : Dans $L^\infty(\mathbb{R})$, pour $f_y := \chi_{[0,y]}$, les $B(f_y, \frac{1}{2})$ sont disjointes 2 à 2. Cet espace n'est donc pas séparable.
- Def : Approximation de l'unité : Une suite $(f_n)_n$ est appelée approximation de l'unité si : $\int_\mathbb{R} f_n(x) d\lambda(x) = 1$, si $f_n \geq 0$, et si $\forall \varepsilon$, $\int_{|x| \geq \varepsilon} f_n(x) d\lambda(x) \to_n 0$.
- Ex : Pour $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $f_n(x) = \frac{1}{n\pi} f(nx)$ est une approximation de l'unité.
- Pro : Pour $(f_n)_n$ approximation de l'unité et $g \in L^1$, $f_n * g \to_{\|.\|_1} g$.
  Si $f_n \in L^q$, cela est aussi vrai pour $g \in L^p$ avec $p = \frac{q}{q-1}$.
- Pro : Régularisation par convolution : Pour f de classe C^k dans L^p et $g \in L^q$ avec $q = \frac{p}{p-1}$, alors $f * g$ est de classe C^k par théorème de dérivation des intégrales à paramètres. La régularité de la convolée ne porte que sur la régularité d'un seul terme.
- Cor : $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. (On convole une suite approchant f avec une approximation de l'unité qui soit C_c^∞)

3. Le cas de L^2. —

- Théorème de Riesz : Pour tout F forme linéaire continue sur $L^2(X)$, il existe $g \in L^2(X)$ tel que $\forall f \in L^2(X)$, $F(f) =< f, g >$.
- Rem : Contrairement au résultat pour tout $1 < p < \infty$, le produit scalaire de L^2 permet de montrer ce résultat bien plus facilement.
- Théorème de projection sur un convexe fermé : Soit C un convexe fermé. Alors pour tout $f \in L^2(X)$ il existe un unique $p(f) \in C$ tel que pour tout $g \in C$ on ait : $< f - g, p(f) - g > \leq 0$.
- Ex : Problème des moindres carrés.
- Rem : Les propriétés d'espace de Hilbert (orthogonalité, projection sur un convexe fermé, supplémentaire orthogonal, famille orthogonale, convergence faible) permettent de faciliter la démonstration de problèmes portant sur les L^p.
- **Dev** : Théorème de Grothendieck : Soit $(X, \mathbb{A}, \mu)$ un espace probabilisé et F un sous-espace vectoriel de $L^\infty(X)$ fermé pour $\|.\|_p$ pour un $1 \leq p < +\infty$.
  Alors F est de dimension finie.

3. Espaces de fonctions holomorphes. —

1. Holomorphie, formule de Cauchy. —
On se place ici sur U un ouvert de $\mathbb{C}$.

- Def : $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur U ssi elle est dérivable en tout $z_0 \in U$ et si $D_{z_0}(f)$ est une similitude directe. (On parle alors de $\mathbb{C}$-dérivabilité) On note $Hol(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.
- Si f,g sont holom sur U et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors f+g, f*g, λf sont holom sur U.
- Si f est holom sur U, g holom sur V, $g(V) \subset U$, alors $f \circ g$ est holom sur V.
- Si $f : U \to V$ est holom bijective, alors f^{-1} est holom.
- Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de cv $R > 0$. Alors sa somme est de classe C^∞ sur $B(0, R)$ et holomorphe sur $B(0, R)$ par théorème de dérivation sous le signe somme et par convergence normale de la série de fonctions.
- Ex : Ainsi, exp, sin,cos,ch,sh, sont holomorphes.
- Contre-ex : $z \mapsto \overline{z} \notin Hol(U)$.
- Théorème de Cauchy sur des petits triangles dans un ouvert étoilé.
- Théorème de Cauchy pour un ouvert étoilé : Soit U un ouvert étoilé, et $f \in Hol(U)$. Alors f possède une primitive dans U, et pour tout $\gamma : [0, 1] \to U$ lacet dans U on a $\int_\gamma f(z) dz = 0$.
- $\frac{1}{z-a}$ est holom sur $\mathbb{C} - \{a\}$
- La formule de Cauchy sur des ouverts étoilés. (on dit à l'oral qu'on peut définir l'indice et avoir un résultat plus fin, mais que c'est plus long)

2. Analyticité et applications. —

- Conséquence : Une fonction holom est indéfiniment dérivable, avec
  $\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{(z-w)^{n+1}} dw$.
  Elle est de plus analytique sur U : Pour tout $z \in U$, il existe un rayon r telle que f coïncide avec la somme de sa série de Taylor sur $B(z, r)$.
- Formule de la moyenne : $f(z) = \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$ pour z, r tq $B(z, r) \subset U$.
- App : Principe du maximum : Une fonction holomorphe sur U qui atteint son maximum dans U est constante.
- App : Théorème de d'Alembert-Gauss : Tout polynôme de degré ≥ 1 admet une racine dans $\mathbb{C}$.
- Principe des zéros isolés : Si $f^{(n)}(x) = 0$ $\forall n \geq 0$ en un $x \in U$, alors $f \equiv 0$ sur la composante connexe de U contenant x. Ainsi, pour U connexe et f non-nulle, l'ensemble des zéros de f est sans point d'accumulation dans U.
- Théorème de Weierstrass holomorphe : Soif $(f_n)_n$ suite de fonctions holom sur U qui cv unif sur tout compact vers f. Alors f est holom sur U et $\forall k \geq 0$, $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$.

3. Un espace de Hilbert de fonctions holomorphes : L'espace de Bergman. —

- Def : Soit X un ensemble et H un espace de Hilbert de fonctions de $X \to \mathbb{C}$. H est un espace de Hilbert à noyau de reproduction ssi il existe $K : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tel que $k_z(.) := \overline{K(z, .)} \in B^2(\mathbb{D})$ $\forall z \in \mathbb{D}$ et tel que $f(z) =< f, k_z > \forall f \in B^2(\mathbb{D})$, $z \in \mathbb{D}$.

- **Dev** : L'espace de Bergman $B^2(\mathbb{D}) := \{f \in Hol(\mathbb{D}) \text{ tq} f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{D})\}$ est un espace de Hilbert pour $\|.\|_2$, dont une base orthonormée est la famille des $e_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} z^n$.
  $f \in Hol(\mathbb{D})$ est dans $B^2(\mathbb{D})$ ssi pour $f(z) = \sum_n a_n z^n$ on a $(\frac{a_n}{\sqrt{n+1}})_n \in l^2$. On a une condition d'intégrabilité qui ne porte que sur les coeffs du DSE en 0.
  L'espace de Bergman est un espace de Hilbert à noyau de reproduction. Son noyau de reproduction est $K_B(z, w) = \frac{\pi}{(1-z\overline{w})^2}$.
- Pro : Un espace de Hilbert de fonctions a un noyau de reproduction ssi les opérateurs d'évaluation $\delta_z : f \mapsto f(z)$ sont continus $\forall z \in X$.
- Théorème : Le noyau de reproduction caractérise l'espace de Hilbert : Si on se donne un noyau de reproduction K, alors il existe un unique $(H, \|.\|)$ hilbert de fonctions $X \to \mathbb{C}$ dont K est le noyau de reproduction.
- Rem : Ainsi, on obtient beaucoup de propriétés sur $B^2(\Omega)$ grâce à l'étude de son noyau de reproduction, qui a une forme simple ici.
- Rem : On peut aussi définir $B^p(\mathbb{D})$ pour $1 \leq p < +\infty$ et ramener certaines études sur les B^p à une étude sur B^2 afin de profiter de son caractère hilbertien.
- Pour Ω un ouvert simplement connexe, on peut aussi définir $B^p(\Omega)$ grâce à l'existence de $\psi : \mathbb{D} \to \Omega$ biholomorphismes. Cette définition est indépendante de ψ, et $B^2(\Omega)$ va lui aussi être un espace de Hilbert à noyau de reproduction, avec un noyau de reproduction que l'on obtient à partir de celui de $B^2(\mathbb{D})$. On peut ainsi exporter des propriétés de $B^2(\mathbb{D})$ vers $B^2(\Omega)$.
- Pro : On peut injecter $B^2(\mathbb{D})$ dans $L^2(\mathbb{D})$. Pour P_B le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{D})$ sur $B^2(\mathbb{D})$, on a : $P_B(f)(z) =< f, \overline{K_B(z, .)} >$, $\forall f \in L^2(\mathbb{D})$, $\forall z \in \mathbb{D}$.
- Thm : Dans un espace de Hilbert de fonctions à noyau de reproduction, si un opérateur de composition $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$ est bien défini, alors il est continu.
- Thm : Pour tout $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe, $\forall f \in B^2(\mathbb{D})$, $f \circ g \in B^2(\mathbb{D})$.

Références

Gourdon : Uniforme continuité, Lipschitziannité, Continuité sur un compact, Th de Dini. Th de Baire, Th de Banach-Steinhaus.
Hirsch, Lacombe : Espaces métriques compacts, parties équicontinues, Th d'Ascoli, applications.
Zuily, Queffélec : Th de Cauchy-Arzela-Peano. Densité des cont partout dérivables nulle part(Dev).
Briane, Pagès : Def L^p. Densité des fonctions étagées intégrables. L^2 Hilbert. Convolution.
Brézis : Théorème de Riesz-Fischer. Théorème de Riesz pour L^p, dualité. Densité de C_c^0, inégalité de Hardy, séparabilité.
Zavidovique : Théorème de Grothendieck(Dev).
Amar,Matheron : C-dérivabilité, exemples fondamentaux. Formule de Cauchy, analyticité, principe du maximum et applications, méromorphie, théorème des zéros isolés.
Bayen, Margaria : Espace de Bergman(Dev).

June 10, 2017
Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes